Optimization of the first eigenvalue of the heat diffusion in inhomogeneous media: Global well-posedness of the viscous approximation problems (Topology optimization theory and applications toward wide fields of natural sciences)

AUTHOR(S):

松江, 要; 内藤, 久資

RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B54 (2015), 25–48

Optimization of the first eigenvalue of the heat diffusion in inhomogeneous media: Global well-posedness of the viscous approximation problems

By

松江 要 (Kaname Matsue)*, 内藤 久資 (Hisashi Naito) **

Abstract

We consider the optimization of the first eigenvalue of $-\nabla\cdot(\rho\nabla u)=\lambda u$ on a bounded domain $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ with a constraint on the diffusion coefficient ρ. We reduce our optimization problem to the Hamilton-Jacobi type equation for the function determining ρ via the level set method. We take the viscous approximation of the Hamilton-Jacobi type equation and prove its global well-posedness. We expect that solutions of the original Hamilton-Jacobi type equation are obtained as the "limit" of its viscous approximation. We also expect that the proposing approach leads to the optimization analysis of general energy functionals including constraints. This article is written in Japanese.

Key words: topology optimization, Hamilton-Jacobi type equation, semilinear parabolic evolution equation, viscous approximation.

§ 1. 導入・問題設定

本論文は数理解析研究所共同研究「連続体のトポロジー最適化理論の現実問題への応用」における講演「材料科学と形状最適化」と, その元となった研究論文 [12]-[13] の内容の数学的正当化を試みるものである.

適当な境界条件を課した次の固有値問題を考える：

$$-\nabla\cdot(\rho(x)\nabla u)=\lambda u,\quad x\in\Omega,\quad \rho\in\mathcal{K}. \tag{1.1}$$

ここで, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ は有界領域で,

$$\begin{aligned}\mathcal{K}:=\left\{\rho\in L^\infty(\Omega)\mid \rho=1 \text{ or } c,\ \text{a.e. on }\Omega,\ \int_\Omega \rho dx=(cm_0+(1-m_0))|\Omega|\right\},\\ c>1,\quad m_0\in(0,1)\end{aligned} \tag{1.2}$$

Received October 14, 2014. Accepted February 5, 2015.
2010 Mathematics Subject Classification(s):

*The Institute of Statistical Mathematics, 190-8562, Tachikawa, Tokyo, Japan (kmatsue@ism.ac.jp).
**Graduate School of Mathematics, Nagoya University, 464-8602, Ngaoya, Aichi, Japan (naito@math.nagoya-u.ac.jp).

としている. $|\Omega|$ は Ω の $\mathbb{R}^n$ 内 Lebesgue 測度である. いま, $S := \{x \in \Omega \mid \rho(x) = c\}$ とすると, (1.2) は次を意味している：

$$|S|/|\Omega| \equiv m_0.$$

この設定のもと, 次の問題を考える：

問題 1. 適当な境界条件の下, ρ に依存する第一固有値 $\lambda_1(\rho)$ の $\mathcal{K}$ における上限および下限を達成する $\rho_* \in \mathcal{K}$ を見つけよ. もし存在するならば, レベルセット $S_* := \{x \in \Omega \mid \rho_*(x) = c\}$ の特徴付けをせよ.

ここでは, 斉次 Dirichlet, Neumann, 混合境界条件などを考慮に入れるため, 正の最小固有値を "第一固有値" と呼ぶ事にする. また, 対応する固有関数を "第一固有関数" と呼ぶ事にする.

この問題は以下の状況に起因する："与えられた領域 Ω 内で, 一定の混合比を持つ 2 つの異なる物質を与える. Ω 上の熱伝導効率を最適にするには, これらの物質をどのように配置すれば良いか？". 熱方程式の解の長時間発展は $-\nabla \cdot (\rho(x)\nabla u) = \lambda u$ の第一固有値によって支配されるため, 問題 1 はこの状況のトイモデルと考えられる.

[12]-[13] ではこの問題を数値的に取り扱い, 様々な領域 Ω の形状, 様々な境界条件における最適解 ρ_* の性質を議論している. また, (1.1) の他に Laplacian の一般化固有値問題

$$-\Delta u = \mu\sigma(x)u, \quad x \in \Omega, \quad \sigma \in \mathcal{K} \tag{1.3}$$

の第一固有値最適化も議論している. この問題は Ω 上に非一様密度を持つ太鼓の振動数の解析などで議論されており, 斉次 Dirichlet 境界条件の時は [4]-[5] において最適解 $\sigma_* \in \mathcal{K}$ の特徴付けが数学的に議論されている. 我々の考察は, 問題 1 あるいはより一般の拘束条件を課したエネルギー汎関数の最適化問題に対して, 数学解析の指針を与えるための試みである.

[12]-[13] では, 固有値問題 (1.1), (1.3) の固有値最適化を数値的に解析するための方法としてレベルセット法を採用している. これは Osher-Sethian ([17]), Osher-Santosa ([18]) により考案・整備されたトポロジー最適化法の 1 つである. 鍵となるアイデアは, 形状を考察する集合 $S \subset \Omega$ をある実数値関数 $\phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ の上位レベルセット

$$S = \{x \in \Omega \mid \phi(x) > 0\}$$

とし, 最適化問題を ϕ の時間発展問題に帰着させる事である. このようにすると, (1.1) における ρ や固有値 λ も ϕ の関数として表せる. これにより, 問題 1 は目的関数を第一固有値 $\lambda_1(\phi) =: F(\phi)$ (固有値最大化の時は $F(\phi) := -\lambda_1(\phi)$), 拘束条件を $G(\phi) = \int_\Omega (1_{\phi>0} - m_0)dx$ としたエネルギー汎関数

$$L(\phi) = F(\phi) + \nu G(\phi)$$

を最小化する問題に帰着される．ここで, ν は Lagrange 未定乗数である．[18] で議論される標準的な計算により, L を減少させる方向 $\phi_t = \partial\phi/\partial t$ の満たすべき方程式を導出すると, **Hamilton-Jacobi 型方程式**

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x) = -\{v_0(t,x) + \nu(\phi(t,\cdot))\}|\nabla\phi(t,x)| \tag{1.4}$$

を得る．この方程式は L の最急降下流の方程式として定義され, この方程式の時間大域漸近解が, L を最小化する元 ρ_* を与えると期待される．ここで, (1.1) に対して v_0 は

$$v_0(x) = v_0^{\rho}(x) = \frac{c-1}{\int_\Omega u_\phi^2 dx}|\nabla u_\phi(x)|^2$$

で定義され ([13]), (1.3) に対して v_0 は次式で定義される ([13], [18])：

$$v_0(x) = v_0^{\sigma}(x) = -\frac{\mu_1(\phi)(c-1)}{\int_\Omega \sigma u_\phi^2 dx}|u_\phi(x)|^2. \tag{1.5}$$

u_ϕ は対応する固有値問題の第一固有関数である．また, Lagrange 未定乗数 $\nu = \nu(\phi)$ は (形式的に) 次で与えられる：

$$\nu = \nu(\phi) = -\frac{\int_{\partial S} v_0(x)ds}{\int_{\partial S} ds}, \quad ds \text{ は } \partial S \text{ の面積要素.}$$

注意 1.1. 実際の最急降下流は $\partial\Omega$ 上でのみ定義されているが, v_0 が Ω 全体で定義されている事を用いて Ω 全体に拡張したものが (1.4) である．

(1.4) はエネルギー汎関数 L の勾配流であるため, 解が時間大域的に存在するならばそれは L の臨界点に漸近すると考えられる．L の臨界点を求めるには方程式 (1.4) を長時間解き, 解の漸近挙動を調べる事になるが, ここで根本的な問題が生じる．

問題 2. (1.4) は時間大域的に適切か？すなわち, 適当な関数空間の上で (1.4) の初期値問題は時間大域的に一意可解で, 解は初期値連続依存性を有するか？また, 解は時間大域的に有界か？

(1.4) のような Hamilton-Jacobi 型方程式は粘性解の理論によって解の存在や一意性が議論されるが, (1.4) は体積保存型拘束条件がついた方程式であり, ある種の単調性を満たしていない．また, v_0 や ν に ϕ-依存性があるため, ϕ に依存しない系を考察している Chen-Giga-Goto ([1]) の枠組みからも外れた方程式である．さらに, 平均曲率流方程式 ([7], [8]) のように, ∂S に相当する曲面をある関数のグラフによって表される事は自明ではない (そもそも, ∂S が多様体の意味で "曲面" となる事自体が自明ではない)．よって, (1.4) の局所的な一意可解性ですら非自明である．さらに (1.4) を数値計算する際, ϕ の滑らかさの損失により解く事ができなくなる可能性がある．以上の困難を避けるため, 充分小さな

$\varepsilon > 0$ に対して人工的に "粘性項" $\varepsilon\Delta\phi$ を加え, かつ $|\nabla\phi|$ の項を正則化して滑らかさを回復させる：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \varepsilon\Delta\phi - \{v_0(t,x) + \nu(\phi(t,\cdot))\}\frac{|\nabla\phi(t,x)|^2}{\sqrt{|\nabla\phi(t,x)|^2+\varepsilon}}. \tag{1.6}$$

この方程式の適切性もまた自明ではないが, (1.6) は放物型発展方程式の形をしており, その一般論により解の大域適切性を議論できると期待される. [12]-[13] においても, この方程式を数値計算する事で最適化元の性質を議論している.

本論文では (1.4) の替わりに (1.6) の大域適切性を数学的に議論する. 実際, $\varepsilon \ll 1$ に対して, (1.6) の解は Hamilton-Jacobi 型方程式 (1.4) の解に充分近くなる事が期待される. 特に, (1.6) の大域適切性を示すことができれば, 粘性消滅法 ([6]) などにより $\varepsilon \to 0$ として (1.6) の解を (1.4) の真の解に近づけ, L の臨界点を求められると考えられる. さらに方程式 (1.4) は問題 1 の固有値問題の境界条件に依存しないため, [4]-[5] の議論より広いクラスの問題, さらに一般の拘束条件が課されたエネルギー汎関数の臨界点を求めるための解析の一助となる事が期待される.

本論文は以下で構成される. 2 節で, 固有値問題 (1.1), (1.3) の固有関数の性質を論じる. 固有関数の空間正則性に関する議論の詳細は, 基本的に [9] に従う. また, ρ や σ に対する固有対の連続性も論じている. これは (1.6) のベクトル場の性質を知るために本質的な部分である. 3 節では, 2 節で示した性質を用いて粘性近似問題 (1.6) の大域適切性を論じる. (1.6) あるいはこれを少し修正した然るべき (1.4) の粘性近似に対して, 初期値問題の時間大域適切性を示す. 3 節の終わりに, 粘性消滅法等による (1.4) の適切性に関する私見を述べる.

§ 2. 固有対の性質

本節では固有値問題 (1.1), (1.3) の第一固有対の性質を議論する. (1.4) の非線型項は固有関数に依存しているので, (1.6) の解の適切性を議論するにあたり, 固有関数の性質は本質的である. まず, 一般的な固有値問題

$$-\nabla\cdot(\rho\nabla u) = \lambda\sigma u, \quad \rho, \sigma \in L^\infty(\Omega)$$

の固有値の性質を述べる. ここで, 簡単のために次の仮定をおく.

仮定 2.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は C^2 級の境界を持つ有界領域とする. さらに, 境界値問題は斉次 Dirichlet 境界条件を課す.

注意 2.2. 以下の議論は次の混合境界条件でも同様に成立する (cf. [21])：n を $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトル, $b(x)$ を $\partial\Omega$ 上非負値連続関数として,

$$u = 0 \text{ on } \Gamma_1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} + b(x)u = 0 \text{ on } \Gamma_2, \quad \emptyset \neq \Gamma_1 \subset \partial\Omega,\ \Gamma_1\cup\Gamma_2 = \partial\Omega.$$

斉次 Neumann 条件の場合は零固有値を持つため, 第一固有関数の正値性など, 以下の議論の一部は一般に成立しない. Nodal domain ごとに議論して, 接合するという手順をする事で, 固有関数の連続性など, 3 節以降の議論に差し支えない程度の主張は成立する.

§ 2.1. 固有対の存在

まず, (1.1), (1.3) を少し一般化した固有値問題 $-\nabla\cdot(\rho\nabla u) = \lambda\sigma u$ の解の存在を議論する. ここでの議論は非常に基本的ではあるが, 後ほど固有値の連続性を示すために用いるため, きちんと述べておく. $0 < \rho_1 < \rho_2 < \infty$, $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \infty$ として, $\rho_1 \le \rho(x) \le \rho_2$, $\sigma_1 \le \sigma(x) \le \sigma_2$, a.e. $x \in \Omega$ と仮定する. そして, 次の Rayleigh 商を考える：

$$\lambda(\rho,\sigma) := \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega \rho|\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega \sigma|u|^2 dx}. \tag{2.1}$$

以下の命題の証明には, Rellich-Kondrashov のコンパクト埋め込み定理を使う. この定理は 3.2 節以降でも用いるので, 詳しく述べておく.

命題 2.3 (Rellich-Kondrashov コンパクト埋め込み, e.g. [9], [15])**.** Ω を C^1 境界を持つ $\mathbb{R}^n$ の有界開集合とすると, 次の埋め込みはコンパクトとなる (高階の場合は [15] を参照せよ)：

1. $1 \le p < n$ の時. $p^* := Np/(N-p)$ とし, $q \in [1, p^*)$ を任意に取ったときの $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.
2. $p = n$ の時. 任意の $q \in [1,\infty)$ に対する $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.
3. $p > n$ の時. $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.

命題 2.4. 仮定 2.1 の下, (2.1) で定義した $\lambda(\rho,\sigma)$ を与える $u \in H_0^1(\Omega)$ が存在し, u は方程式 $-\nabla\cdot(\rho\nabla u) = \lambda\sigma u$ の弱解となる.

Proof. $\rho_1 \le \rho(x) \le \rho_2$, $\sigma_1 \le \sigma(x) \le \sigma_2$, a.e. $x \in \Omega$ の仮定があるので

$$\rho_1 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \le \int_\Omega \rho|\nabla u|^2 dx \le \rho_2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx,$$
$$\sigma_1 \int_\Omega |u|^2 dx \le \int_\Omega \sigma|u|^2 dx \le \sigma_2 \int_\Omega |u|^2 dx$$

が成り立つ. ここで, $v \in L^2(\Omega), u \in H_0^1(\Omega)$ に対して

$$\|v\|_\sigma^2 := \int_\Omega \sigma|u|^2 dx, \quad \|u\|_{\rho,\sigma}^2 := \int_\Omega \rho|\nabla u|^2 dx + \int_\Omega \sigma|u|^2 dx$$

と定義すると,

$$\rho_1\|v\|_{L^2}^2 \le \|v\|_\rho^2 \le \rho_2\|v\|_{L^2}^2,$$
$$\min\{\rho_1,\sigma_1,1\}\|u\|_{H^1}^2 \le \|u\|_{\rho,\sigma}^2 \le \max\{\rho_2,\sigma_2,1\}\|u\|_{H^1}^2$$

が成り立つ. よって, $\|\cdot\|_\sigma$, $\|\cdot\|_{\rho,\sigma}$ は, それぞれ通常の L^2-ノルム, H^1-ノルムと同値なノルムを定める. よって $H_0^1(\Omega)$ の中で $\|v\|_\sigma = 1$ を満たす集合は閉であり,

$$\lambda(\rho,\sigma) = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega \rho|\nabla u|^2dx}{\int_\Omega \sigma|u|^2dx} = \inf_{u\in H_0^1(\Omega),\|u\|_\sigma=1} \int_\Omega \rho|\nabla u|^2dx$$

が成り立つ. いま $\{u_j\} \subset H_0^1(\Omega)$ を $\|u\|_\sigma = 1$ を満たす最小化列とすると, $\|u_j\|_{\rho,\sigma}$ は有界となるので, ある $u \in H_0^1(\Omega)$ が存在して, $\{u_j\}$ は $H_0^1(\Omega)$ 内で u に弱収束し, Rellich のコンパクト埋め込み定理により $\|u\|_\sigma = 1$ を満たす. いま u は $\|u\|_\sigma = 1$ の条件下での $\|\nabla u\|_\rho^2$ の最小化問題の解であるので, ある未定乗数 η が存在して

$$\int_\Omega \rho\nabla u\cdot\nabla\xi dx + \eta\int_\Omega \sigma u\xi dx = 0, \quad \forall\xi \in H_0^1(\Omega)$$

を満たす. ここに $\xi = u$ を代入すれば,

$$0 = \int_\Omega \rho|\nabla u|^2dx + \eta\int_\Omega \sigma|u|^2dx = \int_\Omega \rho|\nabla u|^2dx + \nu$$

となり, $\eta = -\lambda$ が成り立つ. すなわち,

$$\int_\Omega \rho\nabla u\cdot\nabla\xi dx = \lambda\int_\Omega \sigma u\xi dx, \quad \forall\xi \in H_0^1(\Omega)$$

が成り立つ. よって, u は $-\nabla\cdot(\rho\nabla u) = \lambda\sigma u$ の弱解である. □

命題 2.5 ([2]). 第一固有値は以下の意味で単調である：$\rho(x) \geq \rho'(x)$, $\sigma'(x) \geq \sigma(x)$ がほとんど全ての $x \in \Omega$ で成り立つ時, $\lambda_1(\rho',\sigma') \leq \lambda_1(\rho,\sigma)$.

いま $\rho,\sigma \in \mathcal{K}$ とすると, 明らかに $1 \leq \rho(x) \leq c$, $1 \leq \sigma(x) \leq c$ がほとんど全ての $x \in \Omega$ で成り立つので, 以下が従う：

系 2.6. ある $0 < \underline{\lambda} < \overline{\lambda} < \infty$ が存在して, 以下の不等式が成立する：

$$\underline{\lambda} \leq \lambda(\rho,1) \leq \overline{\lambda}, \quad \underline{\lambda} \leq \lambda(1,\sigma) \leq \overline{\lambda}.$$

前半が (1.1), 後半が (1.3) の第一固有値評価に対応する. この事実は後ほど用いる.

さて, 命題 2.4 で述べた固有値問題の弱解は, Rayleigh 商の最小化列の弱収束極限として得られたが, 実は H^1-強収束極限として得られる.

命題 2.7. (2.1) の $\lambda(\rho,\sigma)$ に対する最小化列 $\{u_j\} \subset H_0^1(\Omega)$ は, H^1-強収束部分列を含む.

Proof. $\{u_j\}$ を, $\lambda(\rho,\sigma)$ を達成する最小化列とした時, u_j は $\|u\|_\sigma = 1$ と正規化されていると仮定して一般性を失わない. いま $\{u_j\}$ が最小化列であるので, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N > 0$ が存在し, $j > N$ ならば

$$\left|\frac{\int_\Omega \rho|\nabla u_j|^2dx}{\int_\Omega \sigma|u_j|^2dx} - \lambda(\rho,\sigma)\right| = \left|\int_\Omega \rho|\nabla u_j|^2dx - \lambda(\rho,\sigma)\right| < \varepsilon$$

が成り立つ. いま, $j,k>N$ と取れば,

$$\left|\int_\Omega \rho|\nabla u_j|^2dx-\int_\Omega \rho|\nabla u_k|^2dx\right|\le\left|\int_\Omega \rho|\nabla u_j|^2dx-\lambda(\rho,\sigma)\right|+\left|\int_\Omega \rho|\nabla u_k|^2dx-\lambda(\rho,\sigma)\right|<2\varepsilon$$

となる. よって,

$$\left|\int_\Omega \rho|\nabla u_j|^2dx-\int_\Omega \rho|\nabla u_k|^2dx\right|<\frac{2\varepsilon}{\rho_1}$$

が成り立つ. すなわち, $\{\|\nabla u_j\|_{L^2}\}$ は Cauchy 列である. よって, 部分列を選べば $u_j\to u$ in $H^1(\Omega)$ である事がわかる. □

§ 2.2. $-\nabla\cdot(\rho\nabla u)=\lambda u$, $\rho\in\mathcal{K}$

固有値問題 (1.1) を考える. (1.1) は拡散係数 ρ が不連続であるため, 弱解の充分な正則性を期待できない. まず 2.1 節の議論と, [9] や [21] による標準的議論により, 以下を示せる.

命題 2.8 (cf. [9]). 仮定 2.1 のもと, $\rho\in\mathcal{K}$ を固定して固有値問題 (1.1) を考える. この時, (1.1) は一意弱解 $u=u_\sigma\in H_0^1(\Omega)$ を持つ. さらに, 最小固有値は正（すなわち, 第一固有値 $\lambda_1(\rho)$）であり, 対応する固有関数 u_ρ は Ω 上で正, さらにある $\alpha\in(0,1)$ に対して $u_\rho\in C^\alpha(\overline{\Omega})$ となる.

(1) によると $v_0=v_0^\rho$ が $|\nabla u|$ を使って定義されるため, (1.6) の非線型項が良い性質を持つ事を保証するために, $|\nabla u|$ の可積分性をできる限り高くする事が望ましい. そこで, 解の L^p-評価 $(p>2)$ を考える.

(1.1) のタイプの問題をそのまま扱おうとすると, $\rho\in\mathcal{K}$ の不連続性から弱解 u の可積分性も充分には望めない. 特に, ρ を定義する定数 c が $c>1$ の時は (1.1) の弱解 u が $u\in W^{1,\infty}(\Omega)$ となる事はほぼ望めない事が [14] の議論により示唆される. しかし次節において "∇u の L^∞-評価" を用いたいので, 固有関数 u を次のように "近似" する：ρ_ε は ρ の "近似"(後述) で, u_ρ^ε を固有値問題

$$-\nabla\cdot(\rho_\varepsilon\nabla u)=\lambda u \text{ in } \Omega, u=0 \text{ on } \partial\Omega \tag{2.2}$$

の第一固有関数とする. ρ の近似 ρ_ε としてシンプルなものの 1 つは, 次のような ∂S に幅を持たせて補間するものである：

$$\rho_\varepsilon(x):=\begin{cases} c & \text{if } \phi(x)>\varepsilon \\ (c-1)e^{\varepsilon^{-2}}\exp\left(\frac{-1}{\varepsilon^2-(\phi(x)-\varepsilon)^2}\right)+1 & \text{if } 0\le\phi(x)\le\varepsilon \\ 1 & \text{if } \phi(x)<0 \end{cases}. \tag{2.3}$$

$0\le\phi(x)\le\varepsilon$ における $\rho_\varepsilon(x)$ の定義は, C^∞ 関数

$$\varphi(t)=\begin{cases}\exp(-1/t) & (t>0)\\ 0 & (t\le 0)\end{cases}$$

と $\varepsilon^2-(\phi(x)-\varepsilon)^2$ の合成で, $\phi(x)=0,\varepsilon$ において (可微分である時) 微分が 0 になる. 明らかに, ρ を決めるごとに ρ_ε は一意に定まる. また, $\varepsilon\to 0$ のとき, ρ_ε は ρ に $L^\infty(\Omega)$ 内で汎弱収束する事が容易に示せる. よって後述する 2.4 節の議論により u_ρ^ε は $u=u_\rho$ の近似とみなせる.

(2.3) のタイプの補間において, その滑らかさは ϕ の空間的正則性に依存する. ϕ の正則性は (1.6) の適切性に依存し, 古典的な意味での ϕ の正則性は高々$C^{1,\sigma}$, $\sigma\in(0,1)$ まで保証されると期待される. とくに, $\phi\in C^1(\overline{\Omega})$ であれば, $\rho_\varepsilon(x)$ は C^∞ 関数と C^1 関数 $\varepsilon^2-(\phi(x)-\varepsilon)^2$ の合成関数として表され, $\phi(x)=0,\varepsilon$ において微分が 0 になるので, $\rho_\varepsilon\in C^1(\overline{\Omega})$ となる. よって, (2.2) の弱解 u の充分な正則性, 特に $\|\nabla u\|_\infty$ の有界性が見込める. ϕ が正則になるための条件は次の Sobolev の埋め込み定理により決まる.

命題 2.9 (Sobolev 埋め込み, e.g. [9], [15])**.** Ω を C^1 境界を持つ $\mathbb{R}^n$ の有界開集合する.

1. $m-n/p<0$ の場合. $p^*\in(p,\infty)$ を $1/p^*=1/p-m/n$ で定めると, 任意の $q\in[p,p^*]$ に対して $W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$.

2. $m-n/p=0$ の場合. 任意の $q\in[p,\infty)$ に対して $W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$.

3. $m-n/p>0$ かつ $m-n/p\notin\mathbb{N}$ とする. この時, ある $k\in\mathbb{N}$ と $\alpha\in(0,1)$ を使って $m-n/p=k+\alpha$ と表して, 次の埋め込みが連続となる (他の状況に関しては [9], [15] などを参照せよ)：
$$W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

ただし $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ は $u\in C^k(\overline{\Omega})$ のうち, $|\beta|:=\beta_1+\cdots+\beta_n=k$ を満たす β に対して $\partial^\beta u$ がすべて Ω 上で一様に α 次 Hölder 連続となる関数の集合である.

よって, 発展方程式 (1.6) に対して解 ϕ が $W^{2,q}$, $q>n$ ほどの正則性と可積分性を持てば, $\rho_\varepsilon\in C^1(\overline{\Omega})$ とできる. ϕ の正則性については, 3 節で改めて論じる.

注意 2.10. 定理 2.9 の m は自然数である事を想定しているが, 補間空間論 (e.g. [20], [22]) によると, 上の定理の m が非整数でも同様の結果が成り立つ事が知られている. 発展方程式 (1.6) を考えるときは, 3 節の (3.1) のような "分数べき空間" が非整数階正則性をもつ関数の集まりと考えられるため, 放物型発展方程式の観点からは, m が非整数の場合も考慮した埋め込みを適用した方が都合が良い.

$\rho_\varepsilon\in C^1(\overline{\Omega})$ を認めると, 楕円型偏微分方程式の一般論より次が従う.

命題 2.11 (cf. [9])**.** 仮定 2.1 のもと, 楕円型方程式 $-\nabla\cdot(\rho_\varepsilon\nabla u)=f$ を考える. ある $p\geq 2$ に対し $f\in L^p(\Omega)$, (2.3) で定義される ρ_ε が $\overline{\Omega}$ 上 C^1 級であると仮定すると, この方程式は一意解 $u\in W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega)$ をもつ. さらに, ある定数 $C=C(\Omega,c,n,p)>0$ が存在して, $\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}\leq C\|f\|_{L^p(\Omega)}$ を満たす.

$f = \lambda_1(\rho_\varepsilon)u$ とすると, L^2-理論 (命題 2.8) により u は $\overline{\Omega}$ 上で連続なので, 特に任意の $p \in [2, \infty)$ に対して上の定理を適用できる. $\rho_\varepsilon \in C^1(\overline{\Omega})$ という仮定が我々の問題で本質的である事, また自然な設定のもとで妥当である事は 3 節で改めて議論する.

§ 2.3. $-\Delta u = \mu\sigma u$, $\sigma \in \mathcal{K}$

固有関数の高い正則性が期待できる (1.3) については, 2.1 節, [9] や [21] の議論を基に, 以下が示される.

命題 2.12 (cf. [9]). 仮定 2.1 のもと, $\sigma \in \mathcal{K}$ を固定して固有値問題 (1.3) を考える. この時, (1.3) は一意解 $u = u_\sigma \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ を持つ. さらに, 最小固有値は正 (すなわち, 第一固有値 $\lambda_1(\rho)$) であり, 対応する固有関数 u_σ は Ω 上正である.

$u \in W^{2,2}(\Omega)$ である事は, $\partial\Omega$ が C^2 である仮定 2.1 に由来する事に注意せよ. (1.3) に対応する (1.5) の v_0 は u により定義される. 上の定理より u は $\overline{\Omega}$ 上で連続なので, この性質より (1.6) の大域適切性を議論できる.

§ 2.4. 固有対の ρ-連続性

ひとまず問題 1 に戻る. これは最小固有値 $\lambda_1 = \lambda_1(\rho) =: F(\rho)$ の $\mathcal{K}$ 上最小化元（最大化の場合は, $F(\rho) := -\lambda_1(\rho)$ とする）の存在とその性質を問うものであるが, そもそも最小化元は存在するのだろうか？この疑問に答えるには, 固有対の ρ-連続性が重要になる. 後の (1.6) の適切性の証明でも用いるので, ここで議論しておく. 最小化元の存在を示す時は, 一般的にまず次を問う事になる：

問題 3. $F(\rho) := \lambda(\rho)$ (正の最小固有値) は $\rho \in L^\infty(\Omega)$ について汎弱下半連続か？

$L^\infty(\Omega)$ 内汎弱下半連続性は次を意味する：ρ_n が $L^\infty(\Omega)$ 内で ρ に汎弱収束するとき,

$$F(\rho) \le \liminf_{n\to\infty} F(\rho_n).$$

汎弱連続であれば当然これは満たしている.

定理 2.13. $\{\rho_k\}_{k\ge1} \subset L^\infty(\Omega)$ が ρ に $L^\infty(\Omega)$ 内汎弱収束すると仮定する. このとき $\lambda(\rho) = \lim_{k\to\infty} \lambda(\rho_k)$ となる. すなわち, $\lambda(\rho)$ は $L^\infty(\Omega)$ 内汎弱連続である.

Proof. $\lambda_k := \lambda(\rho_k)$ として, これが $k \to \infty$ で $\tilde{\lambda}$ へ収束するとする（上下に有界なので収束部分列を持つ）. この $\tilde{\lambda}$ がある $u \in H^1$ で $\|u\|_{L^2} = 1$ を満たすものを使って $\tilde{\lambda} = \int_\Omega \rho|\nabla u|^2 dx$ となる事を示せば良い (Rayleigh 商による定義から, これは $\lambda(\rho)$ 以上の値を持つ).

λ_k を達成する固有関数を u_k とする. 正規化により, 任意の k に対して $\|u_k\|_{L^2}^2 = 1$ としてよい. すなわち, $\lambda_k = \int_\Omega \rho_k|\nabla u_k|^2 dx$. この u_k は H^1-有界なので弱収束部分列を持

つ．それを再び $\{u_k\}_{k\geq 1}$ と書き, 弱極限を u としよう．定理 2.3 によりこの u は $L^2(\Omega)$-強収束極限である事に注意する．任意の $v \in H^1(\Omega)$ に対して,

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \rho\nabla u\cdot\nabla v dx - \int_\Omega \rho_k\nabla u_k\cdot\nabla v dx\right| \\
&\qquad\leq \left|\int_\Omega \rho\nabla u\cdot\nabla v dx - \int_\Omega \rho_k\nabla u\cdot\nabla v dx\right| + \left|\int_\Omega \rho_k\nabla u\cdot\nabla v dx - \int_\Omega \rho_k\nabla u_k\cdot\nabla v dx\right| \\
&\qquad\leq \left|\int_\Omega \rho\nabla u\cdot\nabla v dx - \int_\Omega \rho_k\nabla u\cdot\nabla v dx\right| + c\left|\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v dx - \int_\Omega \nabla u_k\cdot\nabla v dx\right|.
\end{aligned}
$$

右辺について, $\nabla u\cdot\nabla v$ は Schwartz の不等式より $L^1(\Omega)$ の元である．よって ρ_k の汎弱収束性より第 1 項は $k\to\infty$ で 0 に収束する．第 2 項は u_k の H^1-弱収束性よりやはり $k\to\infty$ で 0 に収束する．ところで, u_k は固有値問題 $-\nabla\cdot(\rho_k\nabla w) = \lambda_k w$ の弱解であった．よって $\int_\Omega \rho_k\nabla u_k\cdot\nabla v dx = \lambda_k\int_\Omega u_k v dx$ である．特に $v = u_k$ として, $\int_\Omega \rho_k\nabla u_k\cdot\nabla u_k dx = \lambda_k$ であり, 仮定よりこれは $k\to\infty$ で $\tilde\lambda$ に収束する．よって上式は次を意味する：

$$
\int_\Omega \rho\nabla u\cdot\nabla u_k dx \to \tilde\lambda \quad (k\to\infty).
$$

また $\left|\int_\Omega \rho\nabla u\cdot\nabla u dx - \int_\Omega \rho\nabla u_k\cdot\nabla u dx\right| \to 0\ (k\to\infty)$ が弱収束の定義より従う．よって

$$
\left|\int_\Omega \rho|\nabla u|^2 dx - \tilde\lambda\right| \leq \left|\int_\Omega \rho|\nabla u|^2 dx - \int_\Omega \rho\nabla u\cdot\nabla u_k dx\right| + \left|\int_\Omega \rho\nabla u\cdot\nabla u_k dx - \tilde\lambda\right| \to 0\ (k\to\infty)
$$

となる．よって, $\int_\Omega \rho|\nabla u|^2 dx = \tilde\lambda$ である．ところで, $\lambda(\rho)$ の最小化列として $\{w^j\}$ をとる．正規化により, $\|w^j\|_{L^2} = 1$ と仮定してよい．するとこの列は H^1-強収束部分列を含むので (命題 2.7), その極限を w とすると, $\|w\|_{L^2} = 1$ ゆえ $\int_\Omega \rho|\nabla w|^2 dx = \lambda(\rho)$. 最小化元の定義により, $\lambda(\rho)\leq\tilde\lambda$ となる．

次に逆向きの不等式を示す．$\tilde\lambda$ は数列 $\{\lambda_k\}$ の極限であり, λ_k の最小化元として u_k が定まっているが, これは次を意味する．w を $\lambda(\rho)$ の最小化元で $\int_\Omega \sigma w^2 dx = 1$ なるものとして,

$$
\frac{\int_\Omega \rho_k|\nabla w|^2 dx}{\int_\Omega \sigma_k w^2 dx} \geq \frac{\int_\Omega \rho_k|\nabla u_k|^2 dx}{\int_\Omega u_k^2 dx} = \lambda_k
$$

となっている．これが任意の k で成り立っている．$f_k := \int_\Omega \rho_k|\nabla w|^2 dx - \lambda_k\int_\Omega w^2 dx$ とする．上の不等式が意味するのは任意の k で $f_k\geq 0$ である事に他ならない．また汎弱収束性より $k\to\infty$ で $\int_\Omega \rho_k|\nabla w|^2 dx \to \int_\Omega \rho|\nabla w|^2 dx$, $\int_\Omega w^2 dx \to \int_\Omega w^2 dx$ となり, 仮定より $\lambda_k\to\tilde\lambda$ となる．これより, f_k は $\tilde f := \int_\Omega \rho|\nabla w|^2 dx - \tilde\lambda\int_\Omega w^2 dx$ に収束する．正値の数列の極限なので $\tilde f\geq 0$ (否とすると任意の $\varepsilon > 0$ に対してある k_0 が存在して $f_{k_0} < 0$ となるが, 今の状況, $f_k\geq 0$ に反する)．w が $\lambda(\rho)$ の最小化元であり, $\int_\Omega w^2 dx = 1$ としていたので, $\tilde f\geq 0$ は $\lambda(\rho)\geq\tilde\lambda$ を意味する．以上より, $\tilde\lambda = \lambda(\rho)$ となる． □

さて, 両者の一致により $\int_\Omega \rho|\nabla w|^2 dx = \int_\Omega \rho|\nabla u|^2 dx$ となる. これは u, w がともに方程式 $-\nabla\cdot(\rho\nabla v) = \lambda v$ の弱解である事を意味する. 弱解は一意なので, ここから $u = w$ となる. すなわち λ_k の最小化元 u_k の弱収束極限 u が $\lambda(\rho)$ の最小化元となっていることも, 上の証明は主張している.

次に, 固有関数の ρ-連続性を論じる.

定理 2.14. $L^\infty(\Omega)$ 内の点列 $\{\rho_n\}$ が上下に正の数で一様におさえられると仮定する. すなわち, ある $c_1, c_2 > 0$ が存在して, $c_1 \le \rho_n(x) \le c_2$, a.e. $x \in \Omega$, $\forall n \in \mathbb{N}$. さらに, $\{\rho_n\}$ が $\rho \in L^\infty(\Omega)$ に汎弱収束すると仮定する. すなわち,

$$\int_\Omega \rho_n f \to \int_\Omega \rho f \quad \text{as } n \to \infty, \quad \forall f \in L^1(\Omega).$$

ρ_n に対する $-\nabla\cdot(\rho_n\nabla)v = \lambda(\rho_n)v$ の固有対を (λ_n, u_n) とする. このとき $n \to \infty$ で $\{u_n\}$ は ρ に対応する固有関数 u に H^1-強収束する. 同様の主張は固有値問題 $-\Delta u = \lambda\sigma u$ についても成立する.

注意 2.15. 上の設定で, $n \to \infty$ の時に λ_n が $\lambda(\rho)$ に収束する事と, $\lambda(\rho)$ の固有関数 u が $\{u_n\}$ の H^1 内弱収束極限である事は命題 2.4 の証明で論じている.

この定理を示すために, 補題を 2 つ用意する.

補題 2.16. $L^\infty(\Omega)$ 内の点列 $\{\rho_n\}$ が上下に正の数で一様におさえられると仮定する. すなわち, ある $c_1, c_2 > 0$ が存在して, $c_1 \le \rho_n(x) \le c_2$, a.e. $x \in \Omega$, $\forall n \in \mathbb{N}$. そして

$$|v|_{\rho_n}^2 := \int_\Omega \rho_n|\nabla v|^2, \quad v \in H^1(\Omega)$$

とすると, これは $|v|_{H^1} := \|\nabla v\|_{L^2}$ と次の意味で同値な H^1-セミノルムを定める. すなわち, n に依らない正の数 $d, D > 0$ が存在して,

$$d|v|_{H^1} \le |v|_{\rho_n} \le D|v|_{H^1}.$$

Proof. 任意の n に対して $c_1 \le \|\rho_n\|_\infty \le c_2$ なので,

$$|v|_{\rho_n}^2 = \int_\Omega \rho_n|\nabla v|^2 \le \|\rho_n\|_\infty \int_\Omega |\nabla v|^2 \le c_2 \int_\Omega |\nabla v|^2 = c_2|v|_{H^1}^2,$$
$$|v|_{\rho_n}^2 = \int_\Omega \rho_n|\nabla v|^2 \ge \operatorname*{essinf}_{x\in\Omega} \rho_n \int_\Omega |\nabla v|^2 \ge c_1 \int_\Omega |\nabla v|^2 = c_1|v|_{H^1}^2.$$

が任意の n で成り立つ. よって $d := \sqrt{c_1}$, $D := \sqrt{c_2}$ とすればよい. □

補題 2.17 (定理 2.13 の証明内で述べている事の再掲). $\{\rho_n\}$ を $L^\infty(\Omega)$ 内汎弱収束列で一様有界なもの, 特にある $c_1, c_2 > 0$ が存在して, $c_1 \le \rho_n(x) \le c_2$, a.e. $x \in \Omega$, $\forall n \in \mathbb{N}$ が成立するものとする. $\{u_n\}$ を $H^1(\Omega)$ 内弱収束列とし, その極限をそれぞれ ρ, u とする. この時 $\{\rho_n \nabla u_n\}$ は $\rho\nabla u$ に次の意味で収束する：任意の $v \in H^1(\Omega)$ に対して,

$$\int_\Omega \rho_n \nabla u_n \cdot \nabla v \to \int_\Omega \rho \nabla u \cdot \nabla v \quad \text{as } n \to \infty.$$

Proof. $v \in H^1(\Omega)$ を任意に取ってくる. この時

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega (\rho_n \nabla u_n - \rho \nabla u) \cdot \nabla v \right| &= \left| \int_\Omega \{\rho_n(\nabla u_n - \nabla u) - (\rho - \rho_n)\nabla u)\} \cdot \nabla v \right| \\
&\le \left| \int_\Omega \rho_n(\nabla u_n - \nabla u) \cdot \nabla v \right| + \left| \int_\Omega (\rho - \rho_n) \nabla u \cdot \nabla v \right| \\
&\le C \left| \int_\Omega (\nabla u_n - \nabla u) \cdot \nabla v \right| + \left| \int_\Omega (\rho - \rho_n) \nabla u \cdot \nabla v \right|
\end{aligned}$$

となる. ただし $C > 0$ は任意の n に対して $\|\rho_n\|_\infty \le C$ となる数で, 一様有界性の仮定よりとれる. ここで $\{u_n\}$ は $H^1(\Omega)$ 内弱収束列であったので第 1 項は $n \to \infty$ で 0 に収束し, Schwartz (あるいは Hölder-Young) の不等式より $\nabla u \cdot \nabla v \in L^1(\Omega)$ となる. よって $\{\rho_n\}$ の汎弱収束性により, 第 2 項も $n \to \infty$ で 0 に収束する. □

以上により, 定理 2.14 を示す準備が整った.

定理 *2.14* の証明. $\{u_n\} \subset H^1(\Omega)$ は u に $L^2(\Omega)$-強収束しているので, 示すべきは $|u_n - u|_{H^1} \to 0$ であるが, 任意の n に対して $|v|_{H^1}$ は $|v|_{\rho_n}$ と同値なセミノルムを定めるので, $|u_n - u|_{\rho_n} \to 0$ $(n \to \infty)$ を示せばよい.

$$\begin{aligned}
|u_n - u|_{\rho_n}^2 &= \int_\Omega \rho_n |\nabla u_n - \nabla u|^2 \\
&= \int_\Omega \rho_n |\nabla u_n|^2 - 2\int_\Omega \rho_n \nabla u_n \cdot \nabla u + \int_\Omega \rho_n |\nabla u|^2.
\end{aligned}$$

第 1 項は固有値の汎弱連続性より $n \to \infty$ で $\lambda(\rho)$ に収束する. 第 2 項は補題 2.17 により $n \to \infty$ で $-2\int_\Omega \rho|\nabla u|^2$ に収束し, これは $-2\lambda(\rho)$ に等しい. 第 3 項は $\{\rho_n\}$ の汎弱収束性より $n \to \infty$ で $\int_\Omega \rho |\nabla u|^2 = \lambda(\rho)$ に収束する. 和を取って, $n \to \infty$ で $|u_n - u|_{\rho_n}^2 \to 0$ となる. □

固有対の汎弱連続性の議論は (1.3) にも, より一般化した $-\nabla \cdot (\rho \nabla u) = \lambda \sigma u$ にも適用できる事に注意せよ.

さて, ここまでは $\rho \in L^\infty(\Omega)$ の場合を想定して議論したが, 2.2 節では, 近似により $\rho_\varepsilon \in C^1(\overline{\Omega})$ に対する固有関数の正則性も議論している. それに伴い, 正則な u に対して, その ρ_ε-連続性が成立する位相もより強くなると考えられる. よって, 正則な固有関数に対する ρ_ε-連続性も議論する.

定理 2.18. $C^1(\overline{\Omega})$ 内の点列 $\{\rho_n\}$ が上下に正の数で一様におさえられると仮定する．すなわち, ある $c_1, c_2 > 0$ が存在して, $c_1 \le \rho_n(x) \le c_2$, $\forall x \in \overline{\Omega}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. さらに, $\{\rho_n\}$ が $\rho \in C^1(\overline{\Omega})$ に C^1-位相で収束すると仮定する．ρ_n に対する $-\nabla\cdot(\rho_n\nabla)v = \lambda(\rho_n)v$ の第一固有対を (λ_n, u_n) とする．このとき, 任意の $p \in [2,\infty)$ に対して, $n \to \infty$ で $\{u_n\}$ は ρ に対応する固有関数 u に $W^{1,p}$-強収束する.

Proof. u_n, u を主張のものとして, $\|u_n - u\|_{W^{1,p}}$ を評価する．$A_\rho u := -\nabla\cdot(\rho\nabla u)$ が $\overline{\Omega}$ 上一様楕円型なので, $u \in W^{2,p}(\Omega)$ に対してアプリオリ評価 $\|u\|_{W^{2,p}} \le C\|Au\|_{L^p}$ が成立する ([10]). また, u_n, u は ρ_n, ρ に対応する固有関数なので, 差を取る事で次が Ω のほとんど至る所で成立する：

$$-\nabla(\rho_n\nabla)(u_n - u) = -\nabla(\rho - \rho_n)\nabla u + \lambda_n u_n - \lambda u.$$

ここで、$\lambda = \lambda(\rho)$ は ρ に対応する固有値である。よって, アプリオリ評価から $\|u_n - u\|_{W^{2,p}} \le C\|A_n(u_n - u)\|_{L^p}$, さらに上式と補間不等式等を用いる事で次が成立する ($\rho_n, \rho \in C^1(\overline{\Omega})$ である事に注意せよ)：

$$\begin{aligned}&\|u_n - u\|_{W^{1,p}} \le C'\|A_n(u_n - u)\|_{L^p}\\&\quad \le C''(\|\rho_n - \rho\|_\infty\|\Delta u\|_{L^p} + \|\nabla(\rho_n - \rho)\|_\infty\|\nabla u\|_{L^p} + |\lambda_n - \lambda|\|u_n\|_{L^p} + \lambda\|u_n - u\|_{L^p}).\end{aligned}$$

最右辺の第 1 項, 第 2 項は仮定より $n \to \infty$ の時に 0 に収束する．第 3 項は, 定理 2.13 の証明と同様にして, $n \to \infty$ の時に 0 に収束する．第 4 項は, ソボレフの埋め込み定理 (命題 2.9) により $p \in [2, p_1]$, $p_1 := (1/2 - 1/n)^{-1}$ のとき $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ が連続になるので, 系 2.6 と併せて $\lambda\|u_n - u\|_{L^p} \le C'''\|u_n - u\|_{H^1}$ という評価が成立する．そして u_n が u に H^1-強収束する事が定理 2.14 の証明と同様にして成立するので, まとめると $p \in [2, p_1]$ に対して $\|u_n - u\|_{W^{1,p}} \to 0$ となる.

次に, $p \ge p_1$ として同様の評価をする．すると, $p \in [p_1, p_2]$, $p_2 := (1/p_1 - 1/n)^{-1}$ のとき埋め込み $W^{1,p_1}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ が連続となるので, $\lambda\|u_n - u\|_{L^p} \le C'''\|u_n - u\|_{W^{1,p_1}}$ という評価式が成立し, 先の W^{1,p_1}-強収束性を用いる事で, 任意の $p \in [2, p_2]$ に対して $\|u_n - u\|_{W^{1,p}} \to 0$ が $n \to \infty$ の時に成立する.

この操作を繰り返す．j 回目の操作の時, $p_j := (1/p_{j-1} - 1/n)^{-1}$ と定義する事で, u_n が u に $p \in [2, p_j]$ の範囲で $W^{1,p}$-強収束する事が示せる．点列 $\{p_j\}_{j\ge1}$ は単調増大で, 強収束性が成り立つ p は任意の $p < \infty$ まで上げる事ができる．よって, 主張が示された. □

固有値問題 (1.3) の場合は, $\sigma \in L^\infty(\Omega)$ の汎弱位相で同様の主張が成り立つ．証明のための評価式が異なるので, 改めて以下で示す.

定理 2.19. $L^\infty(\Omega)$ 内の点列 $\{\sigma_n\}$ が上下に正の数で一様におさえられると仮定する．すなわち, ある $c_1, c_2 > 0$ が存在して, $c_1 \le \sigma_n(x) \le c_2$, a.e. $x \in \Omega$, $\forall n \in \mathbb{N}$. さらに, $\{\sigma_n\}$ が $\rho \in L^\infty(\Omega)$ に汎弱収束すると仮定する．σ_n に対する $-\Delta u = \mu(\sigma_n)\sigma_n u$ の第一固有対を (μ_n, u_n) とする．このとき任意の $p \in [2,\infty)$ に対して, $n \to \infty$ で $\{u_n\}$ は σ に対応する固有関数 u に $W^{1,p}$-強収束する.

Proof. u_n, u を主張のものとして, $\|u_n - u\|_{W^{1,p}}$ を評価する. $u \in W^{2,p}(\Omega)$ に対してアプリオリ評価 $\|u\|_{W^{2,p}} \le C\|\Delta u\|_{L^p}$ が成立する ([10]). また, u_n, u は σ_n, σ に対応する固有関数なので, 差を取る事で次が Ω のほとんど至る所で成立する：

$$-\Delta(u_n - u) = \mu_n \sigma_n u_n - \mu\sigma u.$$

ここで、$\mu = \mu(\sigma)$ は σ に対応する固有値である。よって, アプリオリ評価から $\|u_n - u\|_{W^{2,p}} \le C\|\Delta(u_n - u)\|_{L^p}$, さらに上式と補間不等式等を用いる事で次が成立する：

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{W^{1,p}} &\le C'\|\Delta(u_n - u)\|_{L^p} \\ &\le C''(|\mu_n - \mu|\|\sigma_n\|_\infty\|u_n\|_{L^p} + \mu\|\sigma_n\|_\infty\|u_n - u\|_{L^p} + \mu\|(\sigma_n - \sigma)u\|_{L^p}). \end{aligned} \tag{2.4}$$

(2.4) 最右辺の第 1 項, 第 2 項について. ソボレフの埋め込み定理 (命題 2.9) により $p \in [2, p_1]$, $p_1 := (1/2 - 1/n)^{-1}$ のとき $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ が連続になるので, 系 2.6, σ_n の仮定と併せて

$$C''(|\mu_n - \mu|\|\sigma_n\|_\infty\|u_n\|_{L^p} + \mu\|\sigma_n\|_\infty\|u_n - u\|_{L^p}) \le C'''c_2(\|u_n\|_{H^1}|\mu_n - \mu| + \|u_n - u\|_{H^1})$$

という評価が成立する. そして u_n が u に H^1-強収束する事が定理 2.14 により成立する. また, $\|u_n\|_{H^1}$ は $\|u\|_{H^1}$ に収束し, これは有界である. よって, $n \to \infty$ とすると (2.4) 最右辺の第 1 項, 第 2 項は 0 に収束する.

第 3 項について. $\|(\sigma_n - \sigma)u\|_{L^p}$ を次のように評価する：

$$\begin{aligned} \|(\sigma_n - \sigma)u\|_{L^p} &= \left(\int_\Omega |\sigma_n - \sigma|^p |u|^p dx\right)^{1/p} = \left(\int_\Omega |\sigma_n - \sigma||\sigma_n - \sigma|^{p-1}|u|^p dx\right)^{1/p} \\ &\le (2c_2)^{\frac{p-1}{p}}\|u\|_\infty \left(\int_\Omega (\sigma_n - \sigma)\chi_{\{\sigma_n(x) - \sigma(x) \ge 0\}} dx + \int_\Omega (\sigma_n - \sigma)\chi_{\{\sigma_n(x) - \sigma(x) < 0\}} dx\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Ω が有界なので, 任意の特性関数 χ_A $(A \subset \Omega)$ は $L^1(\Omega)$ の元である. よって, 汎弱収束の定義により, これは $n \to \infty$ とすると 0 に収束する. まとめると, (2.4) により $p \in [2, p_1]$ の時に $\|u_n - u\|_{W^{1,p}} \to 0$ となる. 以下, 定理 2.18 の証明と同様にこの議論を繰り返すことで, 任意の $p \in [2, \infty)$ に対して主張が従う. □

§ 2.5. 最小化解の存在

前節で $F(\rho) = \lambda_1(\rho)$ が $L^\infty(\Omega)$ 上汎弱連続である事を確かめたが, 最小化元が $\mathcal{K}$ で存在する事を示すために, 最小化を考える集合 $\mathcal{K}$ の位相的性質を調べる.

[6], [4] 等で述べられているように、$\mathcal{K}$ は $L^\infty(\Omega)$ 内汎弱閉**ではない**事が知られている。よって、最小化解の存在を示すために $\mathcal{K}$ の替わりに以下の集合を考える：

$$\mathcal{K}^* := \left\{\rho \in L^\infty(\Omega) \mid 1 \le \rho(x) \le c \text{ a.e. on } \Omega,\ \int_\Omega \rho dx = (cm_0 + (1 - m_0))|\Omega|\right\}. \tag{2.5}$$

補題 2.20 (cf. [4] Proposition 2.2)**.** $\mathcal{K}^*$ は $\mathcal{K}$ の $L^\infty(\Omega)$ 内汎弱閉包である。さらに、$\mathcal{K}^*$ は $L^\infty(\Omega)$ 内凸で、汎弱点列コンパクトである。

定理 2.21. 問題 1 について $\rho \in \mathcal{K}$ を拘束条件として考えるとき, $\rho^* \in \mathcal{K}^*$ で, $\lambda(\rho^*) = \inf_{\rho \in \mathcal{K}^*} \lambda(\rho) =: \lambda_{\inf}$ となるものが存在する. さらに、$\inf_{\rho \in \mathcal{K}} \lambda(\rho) = \inf_{\rho \in \mathcal{K}^*} \lambda(\rho)$ である。

この主張は境界条件に依存しない事に注意せよ.

Proof. $\{\rho_n\} \subset \mathcal{K}$ を F の最小化列とすると, $L^\infty(\Omega)$ 内で汎弱収束部分列をもつ. その極限を ρ^* とする. 補題 2.20 により $\mathcal{K}^*$ は $L^\infty(\Omega)$ 内汎弱閉となるので, $\rho^* \in \mathcal{K}^*$ である. 固有値を対応させる F は定理 2.13 により $L^\infty(\Omega)$ 上汎弱連続であるので, $\{\rho_n\}$ が最小化列である事から

$$F(\rho^*) = \lim_{n\to\infty} F(\rho_n) \le F(\rho)$$

が任意の $\rho \in \mathcal{K}^*$ に対して成り立つ. よって ρ^* が最小化解である. 最後の主張は [3] の Proposition 2.3 の議論より従う。 □

固有値の ρ-単調性（系 2.6）により, この下限が正値有限確定なのは明らかである. この最小化解の存在の議論は (1.3) にも, より一般化した $-\nabla \cdot (\rho(x)\nabla u) = \lambda\sigma u$ にも (ρ, σ を考える集合が補題 2.20 で表すような性質を満たす限り) 適用できる.

注意 2.22. 上記の主張は $\mathcal{K}$ の中で $\lambda(\rho)$ の最小化元を取れる事を意味していない。[4] では (1.3) について、ρ^* を対応する固有値問題の固有関数 u^* のレベルセットを使って特徴づけており、それにより最終的に $\rho^* \in \mathcal{K}$ である事を結論づけているが、そのためには領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ の充分な滑らかさと u の正則性が必要である。

§ 3. 粘性近似問題

前節までの準備のもと, 粘性近似問題 (1.6) を考察する. 本節では $\varepsilon > 0$ を固定し, 簡単のため Ω は C^2 級の境界を持つと仮定する. (1.6) は放物型発展方程式の形をしているので, その局所解の存在を見るには, $A\phi = -\varepsilon\Delta\phi$ で定義される作用素 A が適当な関数空間の上でセクトリアル作用素 ([22] では “角域” 作用素と訳されている) となる事を示し, 非線型項

$$f_\varepsilon(t,x,\phi) = -\{v_0(t,x) + \nu(\phi(t,\cdot))\}\frac{|\nabla\phi(t,x)|^2}{\sqrt{|\nabla\phi(t,x)|^2 + \varepsilon}}$$

の性質を考察すれば放物型発展方程式の一般論 (例えば [22]) に帰着できる.

定義 3.1 (セクトリアル作用素. e.g. [11], [22])**.** Banach 空間 X 上の線型作用素 $A\colon X \to X$ は次を満たす時, **セクトリアル作用素**であるという：

1. A は X 内で稠密な定義域を持つ閉作用素である.

2. ある $a \in \mathbb{R}$ と $w \in (0, \pi]$ が存在して, 次を満たす：

$$\sigma(A) \subset \Sigma_w := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\arg(\lambda - a)| < w\}.$$

この Σ_w を A の**セクター**と呼ぶ.

3. A のレゾルベントに対しては, ある定数 $M \geq 1$ が存在して次の評価式を満たす：

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|}, \quad \forall \lambda \notin \Sigma_w.$$

セクトリアル作用素の詳細な性質は [11], [22] などを参照せよ. ここで, 線型作用素 A に関しては一般に次が知られている.

命題 3.2 ([22]：定理 3.21 など)**.** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を C^2 境界を持つ有界領域とし, $\varepsilon > 0$ とする. この時, 任意の $p \in (1, \infty)$ に対し, $Au := -\varepsilon \Delta u$ は

$$D(A) := \left\{ u \in W^{2,p}(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega \right\}$$

を定義域とする $L^p(\Omega)$ 上のセクトリアル作用素となる. ただし, n は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルである. さらに, $X = L^p(\Omega)$ に対する A の分数ベキ空間 $X^\alpha := D((-\varepsilon\Delta)^\alpha)$ ($0 \leq \alpha < 1$) は次で与えられる：

$$X^\alpha = \begin{cases} W^{2\alpha,p}(\Omega) & 0 \leq \alpha < \frac{p+1}{2p} \\ W_N^{2\alpha,p}(\Omega) & \frac{p+1}{2p} < \alpha \leq 1 \end{cases}. \tag{3.1}$$

ここで, $W^{\theta,p}(\Omega)$, $W_N^{\theta,p}(\Omega)$ ($\theta \geq 0$) は次で定義される Banach 空間である：$W^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)$ をフーリエ変換 $\mathcal{F}$ を用いて定義される非整数階 Sobolev 空間

$$W^{\theta,p}(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \mid \mathcal{F}^{-1}[(1 + |\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}u] \in L^p(\mathbb{R}^n)\},$$
$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \text{は } \mathbb{R}^n \text{ 上緩増加超関数の成す空間}$$

として,

$$W^{\theta,p}(\Omega) := \{U \in L^p(\Omega) \mid U\,|_\Omega = u \text{ a.e. in } \Omega \text{ for some } u \in W^{\theta,p}(\Omega)\},$$
$$W_N^{\theta,p}(\Omega) := \left\{ U \in W^{\theta,p}(\Omega) \mid \frac{\partial U}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega \right\}, \quad \theta > \frac{3}{2}.$$

これにより, (1.6) は放物型発展方程式の枠組みに乗る.

注意 3.3. Hamilton-Jacobi 型方程式 (1.4) と異なり, (1.6) は 2 階の微分方程式である. Ω を有界領域としているので, 可解性の議論のためには $\partial\Omega$ 上に境界条件を課す必要がある. ここで, エネルギー汎関数 L は Ω の外の影響を受けない自由エネルギーのようなものとみなせる. よって, ϕ の時間発展が外場の影響を受けない事を考慮に入れるならば, 斉次ノイマン境界条件を課すのが自然と考えられる.

解の存在を示すためには, 抽象的放物型発展方程式に関する以下の 2 つの命題を用いる：

命題 3.4 (一意局所解の存在, e.g. [11], [22]). X を Banach 空間, $0 \leq \alpha < 1$ とし, A を定義域 (3.2) を有する X 上セクトリアル作用素とする. $U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$ を開集合とし, $f\colon U \to X$ を $f(t,u)$ が t について局所 Hölder 連続, u について局所 Lipschitz 連続である写像とする. この時, 任意の $(t_0, u_0) \in U$ に対し, 正の数 $T = T(t_0, u_0) > 0$ で, 初期値問題

$$\frac{du}{dt} = -Au + f(t,u), \quad t > t_0, \tag{3.2}$$

$$u(t_0) = u_0 \tag{3.3}$$

が時刻 $[t_0, t_0 + T)$ において一意解を持つものが存在する. さらに, この一意解は u_0 に ($(t_0, u_0) \in U$ となる範囲で) 連続的に依存する. すなわち, この初期値問題は X^α 上で局所適切である. 解 u の属するクラスに関しては, 例えば [22] の 5 章を参照せよ.

命題 3.5 (解の延長, e.g. [11], [22]). A, f を定理 3.4 のものとし, さらに任意の有界閉集合 $B \subset U$ に対して, $f(B)$ が X 内有界集合となるものと仮定する. u を初期値問題 (3.2)-(3.3) の (t_0, t_1) 上の解とし, t_1 を u の最大存在時刻, 即ち任意の $t_2 > t_1$ に対し (3.2)-(3.3) の (t_0, t_2) 上の解が存在しないものとする. この時, $t_1 = +\infty$ か, 単調増大列 $t_n \to t_1 - 0$ で, $n \to \infty$ のとき $(t_n, u(t_n)) \to \partial U$ となるものが取れるかのどちらかである.

とくに, ある $\tau < t_0$ と (τ, ∞) 上正値有界連続関数 $K(t)$ に対して $U = (\tau, \infty) \times X^\alpha$, f がすべての $(t,u) \in U$ に対して $\|f(t,u)\|_X \leq K(t)(1 + \|u\|_{X^\alpha})$ となるならば, 任意の $u_0 \in X^\alpha$ に対し, 初期値問題 (3.2)-(3.3) の解は任意の $t \geq t_0$ で一意に存在する.

これにより, f_ε の Lipschitz 性と, 適当な関数空間における有界性を示せば (1.6) は大域的適切となる. まずは Lagrange 未定乗数 ν について議論し, f_ε の性質について (1.1) と (1.3) の場合を個別に議論する.

§ 3.1. Lagrange 未定乗数の有限確定性

(1) による Lagrange 未定乗数 ν は, ゼロレベルセット $\phi^{-1}(0)$ の上の “積分” で定義されるが, そもそもこの積分が意味のあるものとして考える事ができるかを論じる必要がある. ϕ が充分滑らかな, いい性質を持つ関数であれば以下の事実により ν の定義は意味を持つ.

補題 3.6. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域とし, $\phi \in C^k(\Omega)$ $(k \geq 1)$ とする. さらに, $0 \in \mathbb{R}$ が ϕ の正則値であると仮定する. このとき, $\phi^{-1}(0)$ は Ω の $n-1$ 次元 C^k-部分多様体である.

補題 3.6 の仮定の下では, $\mathbb{R}^n$ の標準計量から $\phi^{-1}(0)$ の上に誘導される計量を定義でき, $\phi^{-1}(0)$ 上の “積分” が意味を持つ. しかし (1.4), (1.6) 双方において, $\phi^{-1}(0)$ に通常の意味で微分不可能な点がある場合, あるいは $0 \in \mathbb{R}$ が ϕ の臨界値である場合は Riemann

計量に由来する測度を定義できず, ν を定義できない. そこで, より一般の集合の境界の "面積"を定義するため, 次を考える. この議論は [19] や [16] に準ずるものである：

$$M(u) := \int_\Omega |\nabla u| := \sup_{g \in C_0^1(\Omega), |g| \le 1} \int_\Omega u(x)(\nabla \cdot g(x))dx, \quad u \in L^1(\Omega),$$

$$\mathrm{Per}_\Omega A := M(\chi_A) = \sup_{g \in C_0^1(\Omega), |g| \le 1} \int_A (\nabla \cdot g(x))dx.$$

χ_A は可測集合 $A \subset \Omega$ の特性関数である. A の境界が滑らかならば, $\mathrm{Per}_\Omega A$ は Ω の内部に含まれる A の境界の面積 ($\partial A \cap \Omega$ の $n-1$ 次元 Hausdorff 測度) に他ならない. $BV(\Omega)$ を Ω 上有界変動関数全体の集合とする. $BV(\Omega)$ は次をノルムとする Banach 空間である：

$$\|u\|_{BV(\Omega)} := \|u\|_{L^1(\Omega)} + M(u), \quad u \in L^1(\Omega).$$

これを使って, ν を $L^1(\Omega)$ から $\mathbb{R}$ への関数として次で再定義する：

$$\nu(\phi) := \begin{cases} -\int_\Omega v_0(x)|\nabla \chi_{\phi(x)>0}|/M(\chi_{\phi(x)>0}) & \phi \in BV(\Omega),\ \int_{\phi(x)>0} dx = m_0|\Omega| \\ -\infty & \text{それ以外} \end{cases}.$$

ペナルティ$+\infty$ をつけて, $L^1(\Omega)$ 全体で定義できるようにした.

これにより, ϕ が有界変動であるならば $\mathrm{Per}_\Omega\{\phi(x) > 0\}$ が有限値となり, 定義により $\mathrm{Per}_\Omega\{\phi(x) > 0\}$ は $BV(\Omega)$ 内で連続関数である. よって, 直ちに次が従う：

命題 3.7. $v_0 = v_0(x)$ が $\overline{\Omega}$ 上で有界関数であると仮定する. この時, (3.1) で定義される $\nu\colon L^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ は, $\phi \in BV(\Omega)$ について有界である. とくに, $\phi \in C^1(\overline{\Omega})$ で $0 \in \mathbb{R}$ が ϕ の正則値であるならば, (1) の定義が意味を持ち, (3.1) の ν と一致する.

v_0 の有界性に関しては, 次節以降で論じる.

§ 3.2. 固有値問題 (1.3) に対する粘性近似問題の大域適切性

放物型発展方程式 (1.6) の解の適切性を示すために, 非線型項 f_ε の局所 Lipschitz 性と有界性を考察する. まずは, 固有値問題 (1.3) に対する発展方程式 (1.6) を考える. (1.3) に関する議論は (1.1) に関するそれより容易であり, 本節で議論するアイデアを (1.1) に対して併用する必要があるからである.

さて, (1.5) で定義される $v_0 = v_0^\sigma$ は固有関数 u に, よって ϕ にも依存している事に注意する. 定理 2.19 により, 固有関数 $u = u_\sigma$ は

$$\sigma_n \to \sigma \quad (L^\infty(\Omega)\ \text{内汎弱収束}) \quad \Rightarrow \quad \|u_n - u\|_{W^{1,p}} \to 0, \quad p \in [2, \infty)$$

を満たす. u_σ は $\overline{\Omega}$ 上 Hölder 連続なので, u_σ は $\overline{\Omega}$ 上で最大値を取る. u を ϕ の関数とすると, u は高々$L^\infty(\Omega)$ 内の部分集合 $\mathcal{K}$ の元に依存して決まる. ここで $\mathcal{K}$ は以下で定義される集合である事を思い出そう：

$$\mathcal{K} = \left\{ \sigma \in L^\infty(\Omega) \mid \sigma = 1 \text{ or } c \text{ a.e. in } \Omega,\ \int_\Omega \sigma = [(1 - m_0) + (c-1)m_0]|\Omega| \right\}.$$

このとき, 実数の族 $\{\sup_{x\in\Omega}|u_\sigma(x)|\}_{\sigma\in\mathcal{K}}$ は一様有界になる事が期待される. まずはこの点を議論する. ただし、$\mathcal{K}$ は $L^\infty(\Omega)$ 内汎弱点列コンパクトではないので、替わりに (2.5) で定義した $\mathcal{K}^*$ を考え、以下の主張について議論する。

主張 3.8. $\{\sup_{x\in\Omega}|u_\sigma(x)|\}_{\sigma\in\mathcal{K}^*}$ は有限な最大値を持つ.

いま, 写像 $I: L^\infty(\Omega)\to\mathbb{R}$ を次で定義する：

$$I(\sigma) := \sup_{x\in\Omega}|u_\sigma(x)|,$$

$$u = u_\sigma \text{は次の固有値問題の第一固有関数で,} \int_\Omega \sigma u^2 = 1 \text{ を満たすもの：} -\Delta u = \lambda\sigma u.$$

u_σ は $\overline{\Omega}$ 上 Hölder 連続となるので, I の定義は意味を持つ. さて, Banach-Alaoglu の定理により, $L^1(\Omega)$ の共役空間としての $L^\infty(\Omega)$ 内の単位閉球は汎弱コンパクトになる. $\mathcal{K}$ は明らかに汎弱有界なので, とくに汎弱コンパクトである. よって, I が汎弱連続であれば $\{\sup_{x\in\Omega}|u_\sigma(x)|\}_{\sigma\in\mathcal{K}^*}$ が有限な最大値を持つ事が示せる.

命題 3.9. I は $(L^\infty(\Omega), w^*)$ 上連続（すなわち, $L^\infty(\Omega)$ 上汎弱連続）である.

Proof.
p を $p > n$ を満たすように選ぶと,

$$|I(\sigma_1) - I(\sigma_2)| = |\|u_{\sigma_1}\|_\infty - \|u_{\sigma_2}\|_\infty| \le \|u_{\sigma_1} - u_{\sigma_2}\|_\infty \le C\|u_{\sigma_1} - u_{\sigma_2}\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

が成立する. 最後の不等式は埋め込み $W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow C^{0,\sigma}(\overline{\Omega})$ $(p > n, 0 < \sigma < 1)$ の連続性を用いた. 定理 2.19 より $u = u_\sigma$ は $L^\infty(\Omega)$ 内汎弱位相に対して $W^{1,p}$-強連続となるので, 主張が従う. □

これにより, 汎関数 I は $L^\infty(\Omega)$ 内汎弱位相に対するコンパクト集合 $\mathcal{K}^*$ 上の連続関数となる事がわかったので, 直ちに次が示される：

系 3.10. I は $\mathcal{K}^*$ 上で最大値 $C_{\mathcal{K}^*}$ を持つ.

以上より主張 3.8 が従う. とくに, (1.5) で定義される $v_0(x)$ の $\mathcal{K}^*$ 上 L^∞-一様有界性が示された.

次に, $\nu(\phi)$ を調べる. 上記の議論により, 次が成り立つ事が期待される：

$$|\nu(\phi)| \le \frac{\left|\int_\Omega v_0(x)|\nabla\chi_{\phi(x)>0}|dx\right|}{\left|\int_\Omega |\nabla\chi_{\phi(x)>0}|dx\right|} \le \max_{x\in\overline{\Omega}}|v_0(x)|\frac{\int_\Omega |\nabla\chi_{\phi(x)>0}|dx}{\int_\Omega |\nabla\chi_{\phi(x)>0}|dx} \le \sup_{\sigma\in\mathcal{K}} I(\sigma) = C_{\mathcal{K}^*} < \infty.$$

最後に系 3.10 を使った. しかし, この不等式が成り立つには積分 $\int_\Omega|\nabla\chi_{\phi(x)>0}|dx$ が有限確定でなければならないが, ϕ が $BV(\Omega)$ の元である限り ν は常に well-defined であり, 上に有界である.

以上より,

$$\|f_\varepsilon(\phi)\|_{L^p} = \left\| \left(\frac{\mu(c-1)}{\int_\Omega \sigma u^2} u^2 + \nu(\phi) \right) |\nabla \phi(x)| \right\|_{L^p} \leq C_1 C_{\mathcal{K}^*}^2 \|\nabla \phi\|_{L^p} \tag{3.4}$$

となり, f_ε は $W^{1,p}(\Omega)$ 上**大域的** Lipschitz 連続となる．さらに, $B_X(R) := \{u \in X \mid \|u\|_X \leq R\}$ を Banach 空間 X 内の半径 R の閉球とすると, (3.4) は任意の $R > 0$ に対し, $f_\varepsilon(B_{W^{1,p}}(R))$ が有界集合となる事を意味する．よって, 命題 3.4 と 3.5 により, 以下の定理が示される：

定理 3.11 ((1.3) に対する (1.6) の大域適切性)**.** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を C^k 級 ($k \geq 1$) 境界をもつ有界領域, $p > n$, $\alpha \in [1/2, 1)$ とする．この時, 初期値境界値問題 (1.6) は $X = L^p(\Omega)$ を基礎空間とする X^α において大域的適切である．すなわち, (1.6) は X^α 上の global semiflow を生成する．

有界変動関数に関して, 容易に $W^{1,p}(\Omega) \subset BV(\Omega)$ が任意の $p \in [1, \infty]$ に対して従うので, 分数べき指数 α は 1/2 以上で充分である．

以上により, 固有値問題 (1.3) に対する最適化問題について, 我々の考察すべき Hamilton-Jacobi 型方程式 (1.4) の然るべき粘性近似は任意の $\varepsilon > 0$ に対して時間大域的に解く事ができる．

§ 3.3. 固有値問題 (1.1) に対する粘性近似問題の大域適切性

次に, 固有値問題 (1.1) に対する粘性近似問題の適切性を論じる．(1.3) の場合と異なり, v_0 を定義する u は固有値問題 $-\nabla(\rho\nabla u) = \lambda u$ の固有関数であり, u の正則性は非常に限られたものしか保証されない．よって (1.6) における v_0, ν を, ρ も C^1 となるように近似した次の $v_\varepsilon, \nu_\varepsilon$ に置き換え, 粘性近似問題を再定義する：

$$v_\varepsilon(x) = v_\varepsilon^\rho(x) := \frac{c-1}{\int_\Omega |u_\phi^\varepsilon|^2 dx} |\nabla u_\phi^\varepsilon(x)|^2,$$

$$\nu_\varepsilon(\phi) := \begin{cases} -\int_\Omega v_\varepsilon(x) |\nabla \chi_{\phi(x)>0}| / M(\chi_{\phi(x)>0}) & \phi \in BV(\Omega),\ \int_{\phi(x)>0} dx = m_0|\Omega| \\ -\infty & \text{それ以外} \end{cases}.$$

ここで, u_ϕ^ε は ρ_ε を (2.3) で定義したときの固有値問題 $-\nabla \cdot (\rho_\varepsilon \nabla u) = \lambda u$ の第一固有関数である．これを用いて, 考察する発展方程式 (1.6) を次のように修正する：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \varepsilon \Delta \phi - \{v_\varepsilon + \nu_\varepsilon(\phi)\} \frac{|\nabla \phi|^2}{\sqrt{|\nabla \phi|^2 + \varepsilon}}. \tag{3.5}$$

ひとまず, $\rho_\varepsilon \in C^1(\overline{\Omega})$ であるものとして議論を進める．いま, 写像 $I' \colon L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ を次で定義する：

$$I'(\rho) := \|\nabla u_\rho^\varepsilon\|_{L^\infty},$$

$u = u_\rho^\varepsilon$は次の固有値問題の第一固有関数で, $\displaystyle\int_\Omega u^2 = 1$ を満たすもの：$-\nabla \cdot (\rho_\varepsilon \nabla u) = \lambda u.$

命題 3.12. $\mathcal{K}^*$ を (2.5) で定義する。任意の $\rho \in \mathcal{K}^*$ に対し, (2.3) で定義した ρ_ε が $C^1(\overline{\Omega})$ に属すると仮定する. 仮定 2.1 と $p > n$ $(n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{R})$ のもと, ある定数 $C' = C'_{\mathcal{K}^*}(\Omega, n, p, c)$ が存在して, $\sup_{\rho \in \mathcal{K}^*} I'(\rho) \le C' < \infty$.

ここで, ρ に対して ρ_ε が (2.3) によりただ 1 つに決まっている事に注意しよう.

Proof. $\rho_\varepsilon \in C^1(\overline{\Omega})$ なので, 楕円型偏微分方程式の一般論より $-\nabla(\rho_\varepsilon \nabla u) = \lambda u$ は一意解 $u_\rho^\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ をもち, $\|u_\rho^\varepsilon\|_{W^{2,p}} \le C\lambda_1(\rho_\varepsilon)\|u_\rho^\varepsilon\|_p$ なる評価がなりたつ. さて, $p > n$ なので Sobolev 埋め込みにより, ある定数 $C_0 = C_0(\Omega, n, p) > 0$ を使って $\|\nabla u_\rho^\varepsilon\|_\infty \le C\|u_\rho^\varepsilon\|_{W^{2,p}(\Omega)}$ となる. まとめると,

$$\|\nabla u_\rho^\varepsilon\|_\infty \le CC_0\lambda_1(\rho_\varepsilon)\|u_\rho^\varepsilon\|_p \le CC_0\lambda_1(\rho_\varepsilon)|\Omega|^{1/p}\|u_\rho^\varepsilon\|_\infty.$$

ここで, 右辺は $\|u_\rho^\varepsilon\|_\infty$ の定数倍であり, ($\rho_\varepsilon \in C^1(\overline{\Omega})$ なので！) 定理 2.18 に命題 3.9 と同様の議論をあわせて, ある定数 $C_{\mathcal{K}^*} > 0$ が存在して, $\|u_\rho^\varepsilon\|_\infty \le C_{\mathcal{K}^*}$ が全ての $\rho \in \mathcal{K}^*$ に対して成立する事がわかる. 以上より結論が従う. □

これにより, $\rho_\varepsilon \in C^1(\overline{\Omega})$ のもと, $\{\|\nabla u_\rho^\varepsilon\|_\infty\}_{\rho \in \mathcal{K}^*}$ が一様有界となる事がわかる.

さて, ここから (3.5) の非線型項 f_ε の評価をしていくが, 命題 3.12 の仮定を正当化するために, 基礎空間の取り方に気をつけなければならない. $X = L^p(\Omega)$ として, 作用素 $Au = -\varepsilon\Delta u$ を (3.2) を定義域とする線型作用素とする. この時, A は非負値自己共役作用素となり, その分数べき空間が (3.1) で与えられる. さて, ここで非整数階正則性に対する Sobolev 埋め込みを用いる. 命題 2.9 と注意 2.10, さらに (3.1) により, $\alpha \in (0,1)$ として, $2\alpha - n/p > 1$ となる時に $X^\alpha \subset C^1(\overline{\Omega})$ となる事がわかる.

以下では, 次元 n, 分数べき指数 $\alpha \in (0,1)$ と可積分性指数 $p > 1$ が次を満たすと仮定する：

$$p > n, \quad 2\alpha - \frac{n}{p} > 1. \tag{3.6}$$

この仮定のもとで $\phi \in X^\alpha$ とすると, $\phi \in C^1(\overline{\Omega})$ であり, よって $\rho_\varepsilon \in C^1(\overline{\Omega})$ である. 次元の仮定 (3.6) とあわせると, 命題 3.12 が使えて次の不等式が成立する：

$$|v_\varepsilon(x)| = |v_\varepsilon^\rho(x)| = \frac{c-1}{\int_\Omega {u_\rho^\varepsilon}^2}|\nabla u_\rho^\varepsilon(x)|^2 \le (c-1){C'_{\mathcal{K}^*}}^2,$$

$$|\nu(\phi)| = \frac{|\int_\Omega v_\varepsilon(x)|\nabla\chi_{\phi(x)>0}|dx|}{\int_\Omega |\nabla\chi_{\phi(x)>0}|dx} \le \sup_{x \in \overline{\Omega}} |v_\varepsilon(x)| \le (c-1){C'_{\mathcal{K}^*}}^2,$$

$$\|f_\varepsilon(\phi)\|_{L^p} = \|(v_\varepsilon + \nu(\phi))\,|\nabla\phi|\|_{L^p} \le 2(c-1){C'_{\mathcal{K}^*}}^2\|\nabla\phi\|_p.$$

特に, $f\colon X^\alpha \to X$ は大域的 Lipschitz な有界写像となる. よって, 定理 3.4 と 3.5 により, 以下の定理が示される：

定理 3.13 ((1.1) に対する (3.5) の大域適切性)**.** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を C^2 境界をもつ有界領域, n, $\alpha \in (0,1)$, $p > 1$ は (3.6) を満たす指数であるとする. この時, 初期値境界値問題 (3.5) は $X = L^p(\Omega)$ を基礎空間とする X^α において大域的適切である. 特に, (3.6) を満たす α に対して (3.5) は X^α 上の global semiflow を生成する.

指数の仮定 (3.6) の下では, 初期値 $\phi_0 \in X^\alpha$ をもつ (3.5) の解 $\phi(t)$ は**任意の** $t \geq 0$ **に対して** $\phi(t) \in C^1(\overline{\Omega})$ となり, ρ_ε の C^1 性やそれに付随する諸議論が全て意味を持つ事がわかる.

以上により, 固有値問題 (1.1) に対する最適化問題についても, 我々の考察すべき Hamilton-Jacobi 型方程式 (1.4) の然るべき粘性近似は任意の $\varepsilon > 0$ に対して時間大域的に解く事ができる. ただし, 初期値問題を考える関数空間 X^α が固有値問題 (1.3) の場合より厳しくなっている. これは f_ε のリプシッツ性を保証するために $\rho_\varepsilon \in C^1(\overline{\Omega})$ である事, よって $\phi \in C^1(\overline{\Omega})$ である事が必要だからである.

§ 3.4. (1.6) に対する粘性消滅法に向けて

(1.1) と (1.3) 両方の固有値問題において, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してそれぞれ (3.5) および (1.6) が空間的 C^1 かつ有界な時間大域解を持つ事が保証された. ここで粘性消滅法 (e.g. [6]) を適用し, $\varepsilon \to 0$ の極限としてもとの Hamilton-Jacobi 方程式 (1.4) の時間大域解の存在を示せる事が期待される. [6] によると, 粘性消滅法の適用のためには解の族 $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ のプレコンパクト性および極限非線型項

$$f(t,x,\phi,\nabla\phi) = -\{v_0(t,x) + \nu(\phi(t,\cdot))\}|\nabla\phi(t,x)| \tag{3.7}$$

の連続性を保証する必要がある. 最初の問題に関しては, Rellich の定理により埋め込み

$$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\tau}(\overline{\Omega}), \quad 2 - \frac{n}{p} = 1 + \sigma \text{ with } \sigma \in (0,1),\ 0 \leq \tau < \sigma$$

がコンパクトなので, 解の大域有界性より解の族 $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ は $C^{1,\tau}$ の位相で ε に対する収束部分列を持つ. よって, 解の族のプレコンパクト性は成立する.

次に (3.7) の連続性であるが, (1.1) に関しては v_0 を定義する固有関数の微分 ∇u が不連続なので, v_0 の空間的連続性は本問題の設定ではもはや望めない. より弱い意味での粘性消滅法を考察するか, ρ の仮定そのものを変える必要があるだろう. (1.3) については, 固有関数 u の連続性より v_0 の連続性は保証される. Lagrange 未定乗数 ν の定義のためには, 3.1 節で述べたように S の定義関数 ϕ の有界変動性が必要である. 一般に Hamilton-Jacobi 型の方程式の "解" の有界変動性を保証するには, 非線型項 $f(t,x,r,p)$ の r や p に関する**単調性**を課す必要がある. ところが我々の Hamilton-Jacobi 型方程式 (1.4) は, 体積保存型拘束条件に由来する非局所的定数 ν が原因で, f の r に関する単調性が成立しないため, 良く知られた比較原理の枠組みに乗らない. よって, ϕ の有界変動性が一般に期待できず, 付加的な仮定無しには粘性消滅法が使えない. また, 粘性解の理論を組み合わせたレベル

セット法の数学的議論 ([1]) も, v_0 や ν が ϕ に依存するためにそのままでは適用できない. (1.3) を定義する $\sigma \in \mathcal{K}$ が, ϕ の有界変動性を常に保証するクラスに属する条件を加える事ができれば, 粘性消滅法が適用でき, Hamilton-Jacobi 型方程式の真の解を求める事ができるであろう.

異なるアプローチとして, de Georgi の Γ-**極限**によるエネルギー汎関数の最小解の特徴づけが考えられる. これは ε に依存するエネルギー汎関数 F_ε の $\varepsilon \to 0$ による "極限" をとり, もとのエネルギー汎関数 $F = F_0$ の最小解を求めるというものである. [19] では Cahn-Hilliard 方程式を定義するポテンシャルに対して, Γ-極限による最小解の特徴付けが論じられており, [16] にも詳しく解説されている. 本論文では粘性近似問題 (1.6) に対応するエネルギー汎関数を定義しておらず, (1.6) をエネルギー勾配流とする汎関数の存在も非自明であるが, 粘性係数 $\varepsilon > 0$ に依存し, $L(\phi) = F(\phi) + \nu G(\phi)$ に "近い" エネルギーがひとたび定義できれば, L を極限とする変分法的議論により最小解の扱いが可能となると期待される.

§4. 終わりに

本論文では, 問題 1 で表される拘束条件を課した固有値最適化問題を Hamilton-Jacobi 型方程式 (1.4) の漸近解析に帰着させ, 適当な粘性近似問題を設定し, その初期値問題の大域適切性を論じた. エネルギー汎関数が固有値に拘束条件を課したものである場合, 3 節における主結果より, 体積保存型拘束条件を考慮した我々の Hamilton-Jacobi 型方程式の粘性近似問題は充分滑らかな初期値に対して時間大域解を一意に持つ事が保証される. よって, 粘性近似問題を数値計算により時間大域的に解く試みは, 数学的に正当化される.

次のステップは, 粘性消滅法などにより粘性近似問題の解を Hamilton-Jacobi 型方程式 (1.4) の真の解に収束させ, (1.4) の初期値問題の大域適切性を示す事である. しかし拡散係数 ρ の不連続性や, レベルセットを定める関数 ϕ の空間的正則性の損失によるラグランジュ未定乗数 ν の定義など, 越えるべき壁は依然として高い.

なお, 本論文で扱った粘性近似問題の数値計算による固有値最適化は, [13] において詳しく論じている. [13] では, 第一固有値の最適化元は第一固有関数のレベルセットで特徴づけられ, それは楕円型偏微分作用素の固有値問題に普遍的な性質である事が示唆されている. 本論文の結果がその数学的正当性を示す一歩になる事を信じて止まない.

謝辞

本研究は, JST-CREST「離散幾何学から提案する新物質創成と物性発現の解明」, 文部科学省委託事業「数学協働プログラム」, JSPS 科研費基礎研究 (C) (No. 26400067) の支援を受けている.

References

[1] Y. G. Chen, Y. Giga, and S. Goto, *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations*, J. Differential Geom. **33** (1991), 749–786.

[2] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, Interscience Publishers, Inc., New York, N.Y., 1953.

[3] S. Cox and R. Lipton, *Extremal eigenvalue problems for two-phase conductors*, Arch. Rational Mech. Anal. **136** (1996), 101–117.

[4] S. J. Cox and J. R. McLaughlin, *Extremal eigenvalue problems for composite membranes. I*, Appl. Math. Optim. **22** (1990), 153–167.

[5] S. J. Cox and J. R. McLaughlin, *Extremal eigenvalue problems for composite membranes, II*, Appl. Math. Optim. **22** (1990), 169–187.

[6] M. G. Crandall and P.-L. Lions, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 1–42.

[7] L. C. Evans and J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature. I*, J. Differential Geom. **33** (1991), 635–681.

[8] 儀我 美一, 曲面の発展方程式における等高面の方法, 数学 **47** (1995), 21–40.

[9] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, second ed., vol. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[10] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Monographs and Studies in Mathematics, vol. 24, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.

[11] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 840, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981.

[12] 松江 要, 内藤 久資, 二値の熱伝導率を持つ領域の第一固有値に対する最適配置, 応用数理 **23** (2013), 154–159.

[13] K. Matsue and H. Naito, *Numerical studies of the optimization of the first eigenvalue of the heat diffusion in inhomogeneous media*, Japan J. Ind. Appl. Math. (2015). doi:10.1007/s13160-015-0177-5.

[14] N. G. Meyers, *An L^p-estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **17** (1963), 189–206.

[15] 宮島 静雄, ソボレフ空間の基礎と応用, 共立出版, 2006.

[16] 西浦 廉政, 非平衡ダイナミクスの数理, 岩波書店, 2009.

[17] S. Osher and J. A. Sethian, *Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations*, J. Comput. Phys. **79** (1988), 12–49.

[18] S. J. Osher and F. Santosa, *Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints. I. Frequencies of a two-density inhomogeneous drum*, J. Comput. Phys. **171** (2001), 272–288.

[19] P. Sternberg, *The effect of a singular perturbation on nonconvex variational problems*, Arch. Rational Mech. Anal. **101** (1988), 209–260.

[20] H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, North-Holland Mathematical Library, vol. 18, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[21] N. S. Trudinger, *Maximum principles for linear, non-uniformly elliptic operators with measurable coefficients*, Math. Z. **156** (1977), 291–301.

[22] 八木 厚志, 放物型発展方程式とその応用（上）–可解性の理論, 岩波書店, 2011.